Stoll, F.X. (1883): Das Problem der kürzesten Dämmerung, In: Schlömilch, Oskar, Emil Kahl und Moritz Cantor (Hg.): Zeitschrift für Mathemathik und Physik. 28.Jg., Leipzig, Seite 150 - 156.

IX.

Das Problem der kürzesten Dämmerung.

Von

Dr. Stoll

in Bensheim a. d. Bergstr.

Diese zuerst von Nuñez in seinem Werke De crepusculis gestellte Aufgabe wurde zum ersten Male nach jahrelangem Suchen von Joh. Bernoulli (Opera I, 64) gelöst (vergl. Wolf, Handb. d. Math. II, 178). Sowohl er, als auch andere hervorragende Mathematiker erhielten die Lösung nur durch Vermittelung einer schwer discutirbaren Gleichung des vierten Grades, deren Wurzeln eigentlich zwei von einander verschiedenen Aufgaben angehörten, die in der Beziehung von relativen Maximis und Minimis standen, ohne dass diese Beziehung von ihnen erkannt worden wäre. Der Erste, welcher von den beiden correspondirenden Aufgaben wenigstens die eine in befriedigender Weise löste, war nach Wolf a. a. O. der verstorbene Kopenhagener Astronom d'Arrest (Astron. Nachr. 1085 von 1857); derselbe hat übrigens das bei seiner Lösung auftretende Maximum nicht berücksichtigt. Die folgende Darstellung scheint mir den Vorzug zu besitzen, eine in den angedeuteten Beziehungen erschöpfende und allgemeine zu sein; ausserdem beschränkt sie sich auf elementare Hilfsmittel, insofern sie blos die Kenntniss der sphärischen Trigonometrie, nicht aber die der Differentialrechnung voraussetzt, und bietet deshalb einen geeigneten Uebungsstoff für Schüler höherer Lehranstalten. Wir stellen uns demgemäss folgende zwei Aufgaben, von deren zweiter das sogenannte Problem der kürzesten Dämmerung ein specieller Fall ist:

I. Unter welcher Polhöhe kommt ein Stern, dessen Declination d gegeben ist, am schnellsten von einem gegebenen Almucantarat h_1 zu einem zweiten gegebenen Almucantarat h_2?

II. Wie gross muss die Declination eines Sternes sein, damit derselbe an einem Orte von gegebener Polhöhe φ am schnellsten von einem gegebenen Almucantarat h_1 zu einem zweiten gegebenen Almucantarat h_2 gelange?

Wir nennen die Azimute des Sternes, wenn er die Höhen h_1 und h_2 hat, bezüglich α_1 und α_2, ferner die zu h_1 und h_2 gehörigen Stundenwinkel bezüglich t_1 und t_2; ausserdem setzen wir voraus, der Stern sei im Sinken begriffen, also $h_1 > h_2$ und $t_2 > t_1$. Dann gelten für das Dreieck Zenith, Pol, Stern folgende drei Gleichungspaare:

$$1)\quad \begin{cases} \cos h_1 \sin \alpha_1 = \cos d \sin t_1, \\ \cos h_2 \sin \alpha_2 = \cos d \sin t_2; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \sin h_1 - \sin \varphi \sin d = \cos \varphi \cos d \cos t_1, \\ \sin h_2 - \sin \varphi \sin d = \cos \varphi \cos d \cos t_2; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \cos h_1 \cos \alpha_1 \cos \varphi = \sin h_1 \sin \varphi - \sin d, \\ \cos h_2 \cos \alpha_2 \cos \varphi = \sin h_2 \sin \varphi - \sin d. \end{cases}$$

Durch Multiplication der Gleichungen eines jeden Paares miteinander erhält man:

$$\cos h_1 \cos h_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = \cos^2 d \sin t_1 \sin t_2,$$
$$(\sin h_1 - \sin \varphi \sin d)(\sin h_2 - \sin \varphi \sin d) = \cos^2 \varphi \cos^2 d \cos t_1 \cos t_2,$$
$$\cos h_1 \cos h_2 \cos^2 \varphi \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 = (\sin h_1 \sin \varphi - \sin d)(\sin h_2 \sin \varphi - \sin d).$$

Nachdem man die erste dieser drei Gleichungen mit $\cos^2 \varphi$ multiplicirt hat, addire man sie zu der Summe der beiden letzten und ziehe sie davon ab; dadurch bekommt man zwei neue Gleichungen, die wir der Kürze halber in eine einzige zusammengezogen haben:

$$\cos^2 \varphi \cos h_1 \cos h_2 \cos(\alpha_1 \mp \alpha_2) + (\sin h_1 - \sin \varphi \sin d)(\sin h_2 - \sin \varphi \sin d)$$
$$= \cos^2 \varphi \cos^2 d \cos(t_2 \mp t_1) + (\sin h_1 \sin \varphi - \sin d)(\sin h_2 \sin \varphi - \sin d).$$

Dadurch, dass man die Klammergrössen ausmultiplicirt, reducirt und das Resultat durch $\cos^2 \varphi$ dividirt, kommt folgende Doppelgleichung zum Vorschein:

$$\cos^2 d \cos(t_2 \mp t_1) = \cos h_1 \cos h_2 \cos(\alpha_1 \mp \alpha_2) + \sin h_1 \sin h_2 - \sin^2 d$$

oder, wenn man die Functionen der Winkeldifferenzen und Winkelsummen durch Functionen der halben Differenzen und Summen ersetzt und dann die Doppelgleichung wieder getrennt schreibt:

$$4)\quad \cos^2 d \sin^2 \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \cos h_1 \cos h_2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin^2 \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2),$$
$$5)\quad \cos^2 d \sin^2 \tfrac{1}{2}(t_2 + t_1) = \cos h_1 \cos h_2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin^2 \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2).$$

Nun giebt die Subtraction der Gleichungen 2):

$$\cos \varphi \cos d (\cos t_1 - \cos t_2) = \sin h_1 - \sin h_2$$

oder

$$\cos \varphi \cos d \sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) \sin \tfrac{1}{2}(t_2 + t_1) = \sin \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2) \cos \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2);$$

aus der Zusammenstellung des Quadrats dieser Gleichung mit Gleichung 5) lässt sich sofort erkennen, dass

$$6)\quad \cos^2 \varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(h_1 - h_2) \cos^2 \frac{1}{2}(h_1 + h_2)}{\cos h_1 \cos h_2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin^2 \frac{1}{2}(h_1 - h_2)}.$$

Die Gleichungen 4) und 6) enthalten die Lösungen der beiden oben gestellten Aufgaben. In der That ersieht man aus Gleichung 4), die wir zuerst betrachten wollen, dass für ein constantes d ein Minimum von (t_2-t_1) stattfindet, wenn $\alpha_1=\alpha_2$; der Minimalwerth von (t_2-t_1) ist dann gegeben durch die Gleichung:

$$7)\qquad sin\tfrac{1}{2}(t_2-t_1)=\frac{sin\frac{1}{2}(h_1-h_2)}{cos\, d},$$

welche uns noch eine weitere Bedingung für die Möglichkeit eines Minimums kennen lehrt, dass nämlich $\frac{1}{2}(h_1-h_2)<90^0-d$ sein muss. Um die Polhöhe zu finden, bei welcher das Minimum eintritt, setze man in dem Gleichungspaare 3) $cos\,\alpha_1=cos\,\alpha_2$ und dividire dann die eine Gleichung durch die andere; so erhält man:

$$\frac{cos\,h_1}{cos\,h_2}=\frac{sin\,h_1\,sin\,\varphi-sin\,d}{sin\,h_2\,sin\,\varphi-sin\,d}$$

oder, wenn man entwickelt und ordnet:

$$sin\,d(cos\,h_2-cos\,h_1)=sin\,\varphi\,sin(h_1-h_2).$$

Dies giebt nach einer leichten Umformung:

$$8)\qquad sin\,\varphi=\frac{sin\frac{1}{2}(h_1+h_2)}{cos\frac{1}{2}(h_1-h_2)}\,sin\,d.$$

Das Azimut, welches der Stern hat, wenn er in jedes der beiden Almucantarate eintritt, findet man durch Subtraction der Gleichungen 3) von einander, nachdem man in ihnen $cos\,\alpha_1=cos\,\alpha_2$ gesetzt hat; denn dieses Verfahren liefert zunächst:

$$(cos\,h_1-cos\,h_2)\,cos\,\varphi\,cos\,\alpha=(sin\,h_1-sin\,h_2)\,sin\,\varphi,$$

woraus

$$9)\qquad cos\,\alpha=-cotg\,\tfrac{1}{2}(h_1+h_2)\,tg\,\varphi$$

folgt, wobei vorausgesetzt wird, dass man den aus Gl. 8) sich ergebenden Werth von φ substituire. Führt man diese Substitution aus, so hat man:

$$9\text{a})\qquad cos\,\alpha=-\frac{cos\frac{1}{2}(h_1+h_2)\,sin\,d}{\sqrt{cos^2\frac{1}{2}(h_1-h_2)-sin^2\frac{1}{2}(h_1+h_2)\,sin^2 d}}.$$

Die Gleichung 4) zeigt ferner, dass ein Maximum von (t_2-t_1) eintritt, wenn $\alpha_2=180^0+\alpha_1$, eine Bedingung, die nur erfüllt gedacht werden kann, wenn wir unter (t_2-t_1) die Zeit verstehen, welche der Stern braucht, um vom ersten Almucantarat bis zu seinem zweiten Durchgange durch das zweite Almucantarat zu gelangen. Den Maximalwerth selber findet man durch die Gleichung:

$$cos^2 d\,sin^2\tfrac{1}{2}(t_2-t_1)=cos\,h_1\,cos\,h_2+sin^2\tfrac{1}{2}(h_1-h_2).$$

Die rechte Seite lässt sich umformen, indem man $sin^2\frac{1}{2}(h_1-h_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos(h_1-h_2)$ setzt und $cos(h_1-h_2)$ entwickelt; sie erhält dann die Form $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos(h_1+h_2)$ oder $cos^2\frac{1}{2}(h_1+h_2)$, so dass

$$10)\qquad sin\tfrac{1}{2}(t_2-t_1)=\frac{cos\frac{1}{2}(h_1+h_2)}{cos\,d}$$

wird. Soll das Maximum wirklich möglich sein, so muss noch die Nebenbedingung $\frac{1}{2}(h_1+h_2)>d$ erfüllt sein, wenigstens dem absoluten Werthe nach. Die Polhöhe, unter welcher dieses Maximum eintritt, ergiebt sich durch Division der Gleichungen 3), nachdem man in ihnen $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$ gesetzt hat; es kommt nämlich vorerst:

$$\sin d\,(\cos h_1 + \cos h_2) = \sin\varphi\,\sin(h_1+h_2)$$

und dann nach leichter Umformung

$$11)\qquad \sin\varphi = \frac{\cos\frac{1}{2}(h_1-h_2)}{\sin\frac{1}{2}(h_1+h_2)}\sin d.$$

Die Subtraction der Gleichungen 3) liefert in diesem Falle, wenn man in ihnen $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$ setzt und dann wie oben verfährt:

$$12)\qquad \left.\begin{matrix}\cos\alpha_1\\ \cos\alpha_2\end{matrix}\right\} = \mp\, tg\tfrac{1}{2}(h_1-h_2)\,tg\,\varphi$$

oder, wenn man den Werth von φ aus 11) substituirt:

$$12\text{a})\qquad \left.\begin{matrix}\cos\alpha_1\\ \cos\alpha_2\end{matrix}\right\} = \mp\frac{\sin\frac{1}{2}(h_1-h_2)\sin d}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}(h_1+h_2)-\cos^2\frac{1}{2}(h_1-h_2)\sin^2 d}}.$$

Wir wenden uns jetzt zur Behandlung der zweiten oben gestellten Aufgabe, wozu die Gleichung 6) die nöthigen Dienste leistet. Aus ihr findet man für ein constantes φ als Bedingung des Minimums: $\alpha_1+\alpha_2=180^0$, d. h.: die Höhenkreise, in denen sich der Stern bei seinem Durchgange durch das erste und zweite Almucantarat befindet, müssen gleichweit südlich und nördlich vom ersten Vertikal entfernt sein.

Bei Erfüllung der gestellten Bedingung geht die Gleichung 6) über in:

$$\cos^2\varphi\,\sin^2\tfrac{1}{2}(t_2-t_1) = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(h_1-h_2)\cos^2\frac{1}{2}(h_1+h_2)}{\cos h_1\,\cos h_2+\sin^2\frac{1}{2}(h_1-h_2)};$$

der Nenner der rechten Seite verwandelt sich, wenn man statt $\sin^2\frac{1}{2}(h_1-h_2)$ den Werth $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(h_1-h_2)$ setzt, in $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(h_1+h_2)$ oder $\cos^2\frac{1}{2}(h_1+h_2)$ und man erhält daher für die Minimalzeit die Gleichung:

$$13)\qquad \sin\tfrac{1}{2}(t_2-t_1) = \frac{\sin\frac{1}{2}(h_1-h_2)}{\cos\varphi},$$

aus welcher ersichtlich ist, dass für die Möglichkeit eines Minimums noch die Nebenbedingung $\frac{1}{2}(h_1-h_2)<90^0-\varphi$ bestehen muss. Setzt man in den Gleichungen 3) $\cos\alpha_2=-\cos\alpha_1$ und dividirt, so ergiebt sich in der nämlichen Weise, wie oben bei dem Maximum in der ersten Aufgabe, für die Declination, bei welcher das Minimum stattfindet, die Gleichung:

$$14)\qquad \sin d = \frac{\sin\frac{1}{2}(h_1+h_2)}{\cos\frac{1}{2}(h_1-h_2)}\sin\varphi.$$

Um die Azimute des Sternes im ersten und zweiten Almucantarat zu finden, subtrahire man die Gleichungen 3), nachdem man in ihnen $\cos\alpha_2=-\cos\alpha_1$ gesetzt hat, wodurch zunächst

$$(\cos h_1 + \cos h_2) \cos \varphi \cos \alpha = (\sin h_1 - \sin h_2) \sin \varphi$$

und nach leichter Transformation

$$15) \qquad \left.\begin{matrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \end{matrix}\right\} = \pm \, tg \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2) \, tg \varphi$$

erhalten wird.

Für das Maximum endlich giebt unter der Voraussetzung, dass die Breite gegeben ist, die Gleichung 6) die Bedingung $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, die, wie bei der ersten Aufgabe, nur erfüllt gedacht werden kann, wenn man unter $(t_2 - t_1)$ die Zeit versteht, welche der Stern braucht, um vom ersten Almucantarat bis zum zweiten Durchgang durch das zweite Almucantarat zu gelangen. Dann erhält man sofort für die Maximalzeit:

$$16) \qquad \sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\cos \frac{1}{2}(h_1 + h_2)}{\cos \varphi}$$

mit der Nebenbedingung $\frac{1}{2}(h_1 + h_2) > \varphi$, wenigstens dem absoluten Werthe nach. Zur Bestimmung der Declination für das Maximum bekommt man durch Division der Gleichungen 3), nachdem man in ihnen $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$ gesetzt hat, in der nämlichen Weise, wie oben bei dem Minimum in der ersten Aufgabe, die Gleichung:

$$17) \qquad \sin d = \frac{\cos \frac{1}{2}(h_1 - h_2)}{\sin \frac{1}{2}(h_1 + h_2)} \sin \varphi.$$

Die Subtraction der Gleichungen 3) endlich, nachdem man in ihnen $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$ gesetzt hat, giebt in ähnlicher Weise, wie bei dem Minimum in der ersten Aufgabe für die Azimute beim Eintritt in das erste und zweite Almucantarat:

$$18) \qquad \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = -\cot g \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2) \, tg \varphi.$$

Als Anwendung der erhaltenen Formeln wollen wir $h_1 = 0$ und $h_2 = -18^0$ setzen, wie es bei der Untersuchung der kürzesten Dämmerungszeit nothwendig ist. Man hat dann zur Beantwortung der Frage, unter welcher Polhöhe bei gegebener Declination der Sonne die kürzeste Dämmerung stattfinde, aus Gleichung 8:

$$\sin \varphi = -tg\, 9^0 \sin d.$$

Dabei muss $\alpha_1 = \alpha_2$ sein; die Nebenbedingung $d < 81^0$ fällt weg, weil sie sich von selbst erfüllt, indem die Declination der Sonne $23\frac{1}{2}^0$ nicht übersteigen kann. Ferner ist

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cot g\, 9^0 \, tg \varphi, \text{ bezüglich } = \frac{\cos 9^0 \sin d}{\sqrt{\cos^2 9^0 - \sin^2 9^0 \sin^2 d}}$$

und die kürzeste Dämmerungszeit selbst wird durch die Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin 9^0}{\cos d}$$

gefunden.

Ein Maximum der Dämmerungszeit giebt es nicht, weil das oben für den allgemeinen Fall gefundene Maximum die ganze eigentliche Nacht in sich begreifen würde; wenn man aber nach dem Maximum der Zeit fragt, welche die Sonne braucht, um vom Horizont bis zu ihrem zweiten Durchgange durch das Almucantarat -18^0 zu gelangen, so giebt die Gleichung

$$\sin \varphi = -\,cotg\, 9^0 \sin d$$

darauf die Antwort. Die dabei zu erfüllenden Bedingungen sind $\alpha_2 = 180^0 + \alpha_1$ und $d < 9^0$, und die Azimute, welche die Sonne beim Untergang und beim zweiten Durchgang durch das Almucantarat -18^0 besitzt, sind gegeben durch die Gleichung

$$\left.\begin{matrix}\cos\alpha_1\\ \cos\alpha_2\end{matrix}\right\} = \pm\, tg\, 9^0\, tg\, \varphi, \text{ bezüglich } = \pm \frac{\sin 9^0 \sin d}{\sqrt{\sin^2 9^0 - \cos^2 9^0 \sin^2 d}}.$$

Soll die Frage beantwortet werden, bei welcher Declination der Sonne an einem Orte von gegebener Polhöhe die kürzeste Dämmerung stattfinde, so thut dies die aus (Gleichung 14) folgende Gleichung:

$$\sin d = -\,tg\, 9^0 \sin \varphi.$$

Die zu erfüllenden Bedingungen sind erstens $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^0$, was oben erklärt ist, und zweitens $\varphi < 81^0$. Die Minimalzeit selbst findet man durch die Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin 9^0}{\cos \varphi},$$

und die Azimute, in denen die Sonne den Horizont und das Almucantarat -18^0 zum ersten Male schneidet, durch die Gleichung

$$\left.\begin{matrix}\cos\alpha_1\\ \cos\alpha_2\end{matrix}\right\} = \pm\, tg\, 9^0\, tg\, \varphi.$$

Ein eigentliches Maximum der Dämmerung kann aus dem oben angeführten Grunde auch hier nicht stattfinden; wohl aber giebt es ein Maximum der Zeit, welche die Sonne von ihrem Untergange an bis zu ihrem zweiten Durchgange durch das Almucantarat -18^0 braucht; dies findet statt bei der durch die Gleichung

$$\sin d = -\,cotg\, 9^0 \sin \varphi$$

bestimmten Declination, wobei die Bedingungen gelten $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ und $\varphi < 9^0$, wenigstens dem absoluten Werthe nach. Die Maximalzeit lernt man kennen durch die Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\cos 9^0}{\cos \varphi},$$

und die Azimute, in welchen die Sonne den Horizont erreicht und zum zweiten Male das Almucantarat -18^0 schneidet, durch die Gleichung

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \cot g\, 9^0\, tg\,\varphi.$$

Eine weitere Anwendung lassen unsere Formeln zu, wenn man nach derjenigen Stellung eines Sternes fragt, wo er am schnellsten seine Höhe ändert. Setzt man nämlich in Gleichung 14) $h_2 = h_1$, so erhält man für die Declination des Sternes bei gegebener Höhe und Polhöhe $\sin d = \sin h_1 \sin\varphi$, und, wenn man diesen Werth in die erste der Gleichungen 3) substituirt, $\cos\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_1 = 90^0$, d. h.: der Stern muss im ersten Vertikal stehen. Die Gleichung 13) kann man auch schreiben

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(h_1 - h_2)}{\sin\frac{1}{2}(t_2 - t_1)} = \cos\varphi,$$

und da für $h_2 = h_1$ auch $t_2 = t_1$ wird, so drückt die linke Seite die Geschwindigkeit des Sinkens aus, wenn der Stern im ersten Vertikal steht; dieselbe ist, wie man sieht, dem Cosinus der Polhöhe proportional. Aus der Formel $\sin d = \sin h_1 \sin\varphi$ geht zugleich noch hervor, dass die Declination des Sternes den Werth φ nicht überschreiten und auch nicht negativ sein darf, weil im ersten Falle $\sin h_1$ grösser als die Einheit sein müsste und im zweiten Falle der Stern erst unter dem Horizont den ersten Vertikal erreichte.

NB. [illegible]

$\cos h_1 \sin v_1 = \cos\varphi \sin t_1$, $\cos h_2 \sin v_2 = \cos\varphi \sin t_2$ } 1, $\sin h_1 - \sin\varphi \sin d = \cos\varphi \cos d \cos t_1$, $\sin h_2 - \sin\varphi \sin d = \cos\varphi \cos d \cos t_2$ } 2, $\cos h_1 \cos d \cos v_1 = \sin\varphi - \sin h_1 \sin d$, $\cos h_2 \cos d \cos v_2 = \sin\varphi - \sin h_2 \sin d$ } 3

[illegible] 4 u. 5,

$\cos^2\varphi \sin^2\frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \cos h_1 \cos h_2 \sin^2\frac{1}{2}(v_1 - v_2) + \sin^2\frac{1}{2}(h_1 - h_2)$ für [illegible] φ

$\cos^2\varphi \sin^2\frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \cos h_1 \cos h_2 \sin^2\frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \sin^2\frac{1}{2}(h_1 - h_2)$ " " d

[illegible] Minimum, wenn $v_1 + v_2 = 180^0$ u. $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$

" " " " " Max, wenn $v_1 + v_2 = 0$ u. $\alpha_2 - \alpha_1 = 180^0$

" " " " φ, Minimum, " $v_1 - v_2 = 0$ u. $\alpha_2 + \alpha_1 = 180^0$

" " " " " Max, " $v_1 - v_2 = 180$ u. $\alpha_2 + \alpha_1 = 0$

Die Bestimmung der [illegible] [illegible] Stoll [illegible]