PROGRAMM

des

Grossherzoglichen Gymnasiums zu Bensheim

als

EINLADUNG

zu den

öffentlichen Prüfungen

am

Schlusse des Schuljahres 1872—1873.

Inhalt: 1. Jahresbericht der Direction.
2. Beifolgend als wissenschaftliche Beigabe:
Mathematisch-physikalische Miscellen von Dr. Stoll.

MAINZ.
Hof-Buchdruckerei von Joh. Wirth.
1873.

Mathematisch-physikalische Miscellen

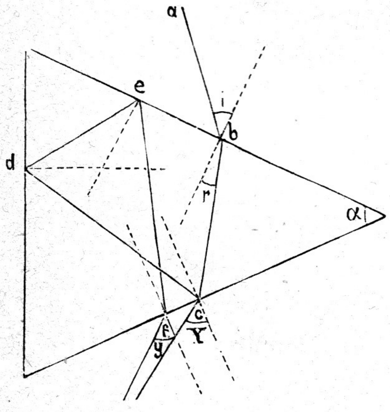
von

Dr. Stoll.

I.

Ueber eine Erscheinung bei Brechung und mehrfacher Reflexion eines Lichtstrahls im Innern eines Prismas.

Läßt man in einem dunkeln Zimmer durch einen Spalt ein Bündel Sonnenstrahlen auf ein Glasprisma fallen, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck ist, so erzeugen sich außer dem durch directe Brechung und Dispersion entstandenen Farbenspectrum noch eine Anzahl anderer Spectra und weißer Bilder des Spalts, welche durch wiederholte Reflexion der Strahlen an den Innenflächen des Prismas und endlichen Austritt derselben an einer der drei Flächen entstehen. Unter diesen zeichnet sich namentlich ein weißes Bild des Spaltes aus, weil es dem Hauptspectrum um so näher rückt, je näher das Prisma der Lage gebracht wird, in welcher die direct von ihm gebrochenen Strahlen das Minimum der Ablenkung erfahren; hat das Prisma diese Lage erreicht, so fällt jenes Bild in die Mitte des Spectrums. Es ist dadurch offenbar ein sehr bequemes Mittel an die Hand gegeben, dem Prisma diese für viele Untersuchungen so nothwendige Lage mit einem ziemlichen Grade von Genauigkeit zu geben, weshalb es der Mühe werth erscheint, die Sache einer näheren Betrachtung zu unterziehen*).



Dringt ein Strahlenbündel ab unter dem Einfallswinkel i in das Prisma ein, so wird der Strahl, dessen Brechungsexponent der Mitte des Spectrums angehört und den wir kurzweg Mittelstrahl nennen wollen, in der Richtung bc gebrochen, welche mit dem Einfallsloth den Winkel r bildet, die andersgefärbten Strahlen in rechts und links davon nur wenig abweichenden Richtungen. Hat das Strahlenbündel auf seinem Wege durch das Prisma die zweite Seitenfläche desselben erreicht, so erleidet es zum größten Theile eine abermalige Brechung, zum Theil aber auch eine Reflexion nach der Rückenfläche des Prismas. Untersuchen wir zuerst den ersten Theil der Strahlen. In c bildet der Mittelstrahl

*) Die hier gegebene Thatsache wurde mir durch meinen Freund und Collegen Weihrich aus einer Vorlesung des Herrn Professor Bohn mitgetheilt, welcher ihre Entdeckung Frauenhofer zuschrieb.

des Spectrums innerhalb des Prismas mit dem Einfallsloth den Winkel $\alpha - r$, wo α den brechenden Winkel des Prismas bedeutet; der Brechungswinkel daselbst sei Y. Dann hat man für diesen Mittelstrahl, wenn noch n den Brechungsexponenten desselben bezeichnet, die Gleichungen $\frac{\sin i}{\sin r} = n$ und $\frac{\sin Y}{\sin(\alpha - r)} = n$.

Will man einen andern Strahl als den Mittelstrahl betrachten, so muß man r in $r + \Delta r$ übergehen lassen, wo man unter Δr einen sehr kleinen positiven oder negativen Zuwachs des Winkels r zu verstehen hat; heißt dann der Brechungswinkel an der zweiten Fläche Y^1 und n^1 der Brechungsexponent des betrachteten Strahls, so hat man die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\sin i}{\sin (r + \Delta r)} = n^1 \text{ und } \frac{\sin Y^1}{\sin (\alpha - r - \Delta r)} = n^1.$$

Aus obigen zwei Gleichungspaaren folgt das dritte:

$$\sin Y = \sin i \, . \, \frac{\sin (\alpha - r)}{\sin r} \text{ und}$$

$$\sin Y^1 = \sin i \, . \, \frac{\sin (\alpha - r - \Delta r)}{\sin (r + \Delta r)}$$

$$= \sin i \, . \, \frac{\sin (\alpha - r) \cos \Delta r - \cos (\alpha - r) \sin \Delta r}{\sin r \cos \Delta r + \cos r \sin \Delta r}$$

Weil nun Δr eine sehr kleine Größe ist, so kann man in der letzten Gleichung statt $\cos \Delta r$ die Einheit und Δr statt $\sin \Delta r$ setzen, wodurch dieselbe übergeht in:

$$\sin Y^1 = \sin i \, . \, \frac{\sin (\alpha - r) - \Delta r \, . \cos (\alpha - r)}{\sin r + \Delta r \, . \cos r}$$

Entwickelt man nach Potenzen von Δr und läßt wegen der Kleinheit von Δr diejenigen Potenzen, welche die erste übersteigen, weg, so kommt unter Berücksichtigung des Werthes von $\sin Y$:

$$\sin Y^1 = \sin Y - \sin i \, . \, \frac{\sin \alpha}{\sin r^2} \, . \, \Delta r$$

$$= \sin Y - n \, . \, \frac{\sin \alpha}{\sin r} \, . \, \Delta r$$

Hieraus ersieht man, daß unter keinen Umständen $Y^1 = Y$ werden kann, es sei denn daß $\alpha = 0$ wäre, wo aber das Prisma in eine parallelflächige Platte übergeht. Es werden daher die verschiedenfarbigen Strahlen, welche schon in b divergirten, in c nicht wieder zur Convergenz gebracht, sondern noch divergenter gemacht, worauf eben die Erzeugung des Spectrums beruht.

Betrachten wir nun denjenigen Theil der Strahlen, welcher in c eine Reflexion erleidet. Ist der Mittelstrahl an der Rückenfläche des Prismas in d angekommen, so bildet er mit dem Einfallsloth im Prisma den Winkel $90^0 - \left[\frac{3\alpha}{2} - r\right]$, wie man durch Betrachtung der Figur mit Hülfe elementar-geometrischer Sätze leicht finden wird; wird er von da auf die erste Seitenfläche des Prismas nach e reflectirt, so ist dort sein Einfallswinkel gleich $\alpha - r$ und nach einer abermaligen Reflexion auf die zweite Seitenfläche nach f gleich r. Die Einfallswinkel der andersgefärbten Strahlen findet man, wie vorher, wenn man r in $r + \Delta r$ übergehen läßt. In d und e findet nun zwar nicht bloß Reflexion, sondern auch unter Umständen, wenn nämlich nicht totale Reflexion eintritt, was von der Größe des Einfallswinkels abhängt, theilweise Brechung und Austritt der Strahlen statt; es läßt sich wie oben zeigen, daß die dort austretenden Strahlen Spectren erzeugen müssen, welche freilich lichtschwächer sind als das erste. Aber diese Erscheinungen bieten nichts besonders Merkwürdiges. Ganz anders verhält es sich mit demjenigen Theile der Strahlen, welche nach der Reflexion in c, d und e bei f austreten. Der Einfallswinkel des Mittelstrahls im Prisma ist, wie schon erwähnt, gleich r, sein Brechungswinkel heiße y; dann ist

$$\frac{\sin y}{\sin r} = n.$$

Man hat aber auch

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

daher das merkwürdige Resultat, daß der Strahl unter demselben Winkel die zweite Seitenfläche des Prismas verläßt, unter dem er auf die erste auffiel. Für einen andersgefärbten Strahl erhält man die zwei Bedingungen:

$$\frac{\sin y^1}{\sin (r + \Delta r)} = n^1 \text{ und } \frac{\sin i}{\sin (r + \Delta r)} = n^1,$$

wo y^1 den Brechungswinkel dieses Strahls beim Austritt aus der zweiten Seitenfläche bedeutet. Also hat man auch hier wiederum $\sin y^1 = \sin i$, während man schon $\sin y = \sin i$ fand, so daß $y = y^1$ ist. Daraus ergiebt sich, daß die verschiedenfarbigen Strahlen bei ihrem Austritt aus dem Prisma alle dieselbe Richtung haben, d. h. nicht zerstreut werden; es muß sich durch sie ein weißes Bild des Spaltes erzeugen.

Dieses Bild fällt im Allgemeinen nicht mit dem Hauptspectrum zusammen, sondern je nach der Stellung des Prismas mehr oder weniger weit davon weg. Soll es mit der Mitte des Spectrums zusammenfallen, so muß $Y = y$ oder $\sin Y = \sin y$ sein. Da aber

$$\sin Y = n \sin (\alpha - r) \text{ und}$$
$$\sin y = n \sin r$$

ist, so hat man die Bedingungsgleichung

$$\sin (\alpha - r) = \sin r$$

oder

$$\alpha - r = r$$

woraus $r = \frac{1}{2}\alpha$ folgt; dies findet aber nur statt, wenn das Minimum der Brechung erreicht ist.

II.

Ueber das Minimum der Brechung beim Prisma.

In Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik XII pag. 176 hatte Dr. Kahl darauf aufmerksam gemacht, daß der elementare Beweis des Satzes, daß das Minimum der Ablenkung beim Prisma eintritt, wenn Eintritts- und Austrittswinkel des Lichtstrahls gleich groß sind, welchen Wüllner in der ersten Auflage des ersten Theiles seiner Physik pag. 682 ff. gibt, nicht stichhaltig sei, und sowohl einen durch mehrfache Constructionen vorbereiteten eigenen Beweis gegeben, als auch den von Eisenlohr in der 7. Auflage seines Lehrbuches der Physik mitgetheilten reproducirt und ergänzt. Letzterer ließ nun a. a. O. pag. 438 einen neuen Beweis erscheinen, der allerdings einfacher ist, als die übrigen und deßwegen auch von Wüllner in die zweite Auflage seiner Physik Theil 3 pag. 92 aufgenommen worden ist. Nichts desto weniger glaube ich, daß man, von derselben Grundlage ausgehend, den Beweis noch einfacher und mehr direct führen könne. Ich lasse deshalb zur Vergleichung zuerst den Beweis von Eisenlohr folgen.

Es seien i u. i^1 Einfalls- und Austrittswinkel des Strahls und zwar $i > i^1$, r u. r^1 die zugehörigen Winkel des Strahls innerhalb des Prismas mit den Einfallslothen, α der brechende Winkel des Prismas und δ die totale Ablenkung, so hat man

$$r + r^1 = \alpha, \quad i + i^1 - \alpha = \delta$$

$$\sin i = n \sin r, \quad \sin i^1 = n \cdot \sin r^1.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\sin i + \sin i^1 = n (\sin r + \sin r^1),$$

$$\sin i - \sin i^1 = n (\sin r - \sin r^1),$$

oder nach bekannten goniometrischen Formeln:

$$\sin {}^1\!/_2 (i + i^1) \cos {}^1\!/_2 (i - i^1) = n \sin {}^1\!/_2 (r + r^1) \cos {}^1\!/_2 (r - r^1) \quad \ldots (1)$$

$$\cos {}^1\!/_2 (i + i^1) \sin {}^1\!/_2 (i - i^1) = n \cos {}^1\!/_2 (r + r^1) \sin {}^1\!/_2 (r - r^1) \quad \ldots (2)$$

Dividiren wir die erste Gleichung durch die zweite, so erhalten wir:

$$\mathrm{tg}\, {}^1\!/_2 (i + i^1) \,\mathrm{cotg}\, {}^1\!/_2 (i - i^1) = \mathrm{tg}\, {}^1\!/_2 (r + r^1) \,\mathrm{cotg}\, {}^1\!/_2 (r - r^1),$$

oder auch, indem wir die beiden cotgg. auf die andere Seite bringen,

$$\mathrm{tg}\, {}^1\!/_2 (i + i^1) \,\mathrm{tg}\, {}^1\!/_2 (r - r^1) = \mathrm{tg}\, {}^1\!/_2 (i - i^1) \,\mathrm{tg}\, {}^1\!/_2 (r + r^1) \quad \ldots\ldots (3)$$

Da nun i u. i^1 die Einfallswinkel sind, zu denen r u. r^1 als Brechungswinkel gehören, so ist immer

$$i + i^1 > r + r^1,$$

somit auch

$$\mathrm{tg}\, {}^1\!/_2 (i + i^1) > \mathrm{tg}\, {}^1\!/_2 (r + r^1).$$

Aus Gleichung (3) folgt deshalb, daß immer

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 (i - i^1) > \operatorname{tg} {}^1\!/_2 (r - r^1)$$

und damit

$$i - i^1 > r - r^1$$

sein muß, es sei denn, daß

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 (i - i^1) = \operatorname{tg} {}^1\!/_2 (r - r^1) = 0$$

$$\text{d. h. } i - i^1 = r - r^1 = 0$$

wäre. So lange die Ungleichheit besteht, ist:

$$\cos {}^1\!/_2 (i - i^1) < \cos {}^1\!/_2 (r - r^1)$$

und deshalb folgt aus Gleichung (1), daß unter derselben Voraussetzung

$$\sin {}^1\!/_2 (i + i^1) > n \sin {}^1\!/_2 (r + r^1)$$

sein muß. Ist dagegen $i - i^1 = r - r^1 = 0$, so ist auch

$$\cos {}^1\!/_2 (i - i^1) = \cos {}^1\!/_2 (r - r^1) = 1$$

und es folgt jetzt aus Gleichung (1)

$$\sin {}^1\!/_2 (i + i^1) = n \sin {}^1\!/_2 (r + r^1).$$

Der Werth von $\sin {}^1\!/_2 (i + i^1)$, also auch von $i + i^1$, also auch von δ, ist unter der letzten Voraussetzung kleiner als unter der ersten; da man aber keine andere Annahme machen kann, so ist er unter der letzten Voraussetzung, d. h. wenn

$$i - i^1 = r - r^1 = 0,$$

ein Minimum.

Dies ist der Beweis von Eisenlohr, mit wenigen Modificationen der Physik von Wüllner entnommen; ich überlasse es der Beurtheilung des Lesers, ob der folgende den Vorzug verdient oder nicht.

Dividirt man die Gleichungen (1) und (2) bezüglich durch $\sin {}^1\!/_2 (r + r^1)$ u. $\cos {}^1\!/_2 (r + r^1)$, quadrirt und addirt, so kommt, wenn man berücksichtigt, daß

$r + r^1 = \alpha$ und $\sin^2 {}^1\!/_2 (r - r^1) + \cos^2 {}^1\!/_2 (r - r^1) = 1$ ist,

$$\frac{\sin^2 {}^1\!/_2 (i + i^1) \cos^2 {}^1\!/_2 (i - i^1)}{\sin^2 {}^1\!/_2 \alpha} + \frac{\cos^2 {}^1\!/_2 (i + i^1) \sin^2 {}^1\!/_2 (i - i^1)}{\cos^2 {}^1\!/_2 \alpha} = n^2,$$

und wenn man $\cos^2 {}^1\!/_2 (i + i^1) = 1 - \sin^2 {}^1\!/_2 (i + i^1)$ setzt, nach einigen leichten Rechnungen $\sin^2 {}^1\!/_2 (i + i^1) = \sin^2 {}^1\!/_2 \alpha . \dfrac{\sin^2 {}^1\!/_2 (i - i^1) - n^2 \cos^2 {}^1\!/_2 \alpha}{\sin^2 {}^1\!/_2 (i - i^1) - \cos^2 {}^1\!/_2 \alpha}$

$$= \sin^2 {}^1\!/_2 \alpha \left[1 + \frac{(n^2 - 1) \cos^2 {}^1\!/_2 \alpha}{\cos^2 {}^1\!/_2 \alpha - \sin^2 {}^1\!/_2 (i - i^1)} \right].$$

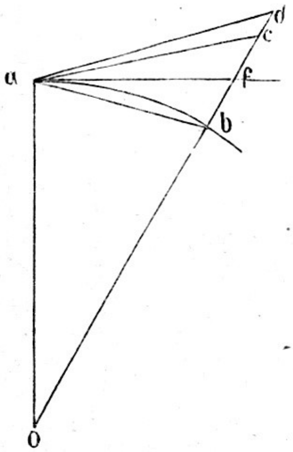
Der Bruch auf der rechten Seite dieser Gleichung erlangt aber dann seinen kleinsten Werth, wenn $\sin^2 {}^1\!/_2 (i - i^1)$ seinen kleinsten Werth hat, d. h. wenn $i = i^1$.

Elementare Beweise des obigen Satzes haben auch gegeben K. L. Bauer in Poggendorffs Annalen Bnd. 131 pag. 476 und von Ettingshausen in Külps Lehrbuch der Physik II pag. 280, welche aber in verdeckter Weise die Differentialrechnung anwenden.

III.

Eine Aufgabe aus der practischen Geometrie.

Alexander v. Humboldt wirft im Kosmos II pag. 166 u. 413 die Frage auf, ob es möglich gewesen sei, daß die Phönicier den Gipfel des großen Vulkans von Teneriffa von den Anhöhen, welche das Cap Bojador umgeben, den sogenannten montañas negras, hätten sehen können. Zu dem Zwecke mußte untersucht werden, wie groß die Höhe sein müßte, von welcher aus man bei Annahme einer mittleren Strahlenbrechung von 0,08 den Pic de Teyde, welcher 2° 49′ im Bogen von dem nächsten Punkte der afrikanischen Küste entfernt und 1904 Toisen hoch ist, noch sehen könne. Humboldt findet 202 Toisen, Martus, welcher diese Aufgabe auch in seiner Sammlung unter Nr. 364 b aufgenommen hat, pag. 80 des zweiten Theils nach einer Formel, die wir unten besprechen werden, 213 Toisen. Diese verhältnißmäßig bedeutende Differenz veranlaßte mich, die Sache näher zu untersuchen.



Zu dem Zwecke wollen wir erst die Aufgabe lösen, die Höhe eines Berges zu bestimmen, wenn die Bogendistanz des Beobachtungspunktes vom Fußpunkt des Berges und der dort beobachtete Höhenwinkel gegeben sind. Sei a f eine Tangente in a und bezeichnet man den bei a beobachteten Höhenwinkel d a f mit h, so ist der wahre Höhenwinkel c a f $= h - \varrho$, wo ϱ der Winkel ist, um welchen die Strahlenbrechung den Höhenwinkel vermehrt; sein Werth ist, wenn man die Constante der Strahlenbrechung mit k und den Centriwinkel a o b mit o bezeichnet, gleich k o. In dem Dreiecke a b c ist alsdann der Winkel

$$abc = 90^0 + \tfrac{1}{2}\, o$$
$$bac = h - \varrho + \tfrac{1}{2}\, o$$
$$acb = 90^0 - h + \varrho - o.$$

Ferner ist $ab = 2r \sin \tfrac{1}{2} o$, wo r den Halbmesser der Erde bedeutet; man findet deshalb die gesuchte Höhe bc oder

$$H = \frac{ab.\ \sin bac}{\sin acb} = \frac{2r \sin \tfrac{1}{2}o \sin (h - \varrho + \tfrac{1}{2}o)}{\cos (h - \varrho + o)}$$

$$\text{oder } H = \frac{2r \sin \tfrac{1}{2}o \sin [h + (\tfrac{1}{2} - k)\, o]}{\cos [h + (1 - k)\, o]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Diesem Ausdrucke kann man die Form geben

$$H = \frac{2r \sin {}^1\!/_2 o \, [\sin h \cos ({}^1\!/_2 - k)\, o + \cos h \sin ({}^1\!/_2 - k)\, o]}{\cos h \cos (1 - k)\, o - \sin h \sin (1 - k)\, o};$$

wenn man berücksichtigt, daß man für kleine Winkel ohne merklichen Fehler statt des Cosinus die Einheit und statt des Sinus den Bogen setzen kann, so geht diese Formel, weil der Winkel o immer sehr klein ist, in keinem Falle wenigstens über 3^0 hinausgeht, in folgende über

$$H = \frac{or \, [\sin h + ({}^1\!/_2 - k)\, o. \cos h]}{\cos h - (1 - k)\, o. \sin h}$$

oder $H = or. \dfrac{tg\, h + ({}^1\!/_2 - k)\, o}{1 - (1 - k)\, o.tg\, h}$

Entwickelt man den Bruch auf der rechten Seite nach Potenzen von o und läßt dabei alle höheren als die erste weg, so erhält man

$$H = or. \, [tg\, h + ({}^1\!/_2 - k)\, o + (1 - k)\, o\, tg^2\, h] \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Das Resultat ist bis auf die dritte Potenz von o genau und stimmt mit dem von Bauernfeind Elemente der Vermessungskunde 2. Aufl. pag. 601 mit Hülfe des Maclaurin'schen Satzes gefundenen überein.

Setzt man in dieser Formel $h = 0$, so gibt sie die Lösung der Aufgabe, wie hoch ein Berg sei, dessen Spitze man in der Bogendistanz o gerade nur noch über den Horizont emporragen sieht; die gesuchte Höhe ist

$$H = ({}^1\!/_2 - k)\, o^2\, r \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Ich kann mir nun aber auch die umgekehrte Aufgabe stellen, wie weit ein Ort von dem Fußpunkte eines Berges, dessen Höhe bekannt ist, entfernt sein müsse, damit ich dort die Spitze desselben gerade noch über den Horizont emporragen sehe, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, wie weit ich von der Spitze eines Berges, dessen Höhe bekannt ist, sehen kann. Dann muß ich offenbar in Gleichung (3) o als unbekannt betrachten und erhalte

$$o = \sqrt{\frac{2\, H}{r\, (1 - 2k)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Um die Genauigkeit der beiden letzten Formeln zu prüfen, genügt es, dem o den größten Werth zu geben, welcher ihm in der Wirklichkeit zukommen kann, nämlich circa 3^0, dann sowohl aus Gleichung (1), nachdem man darin $h = 0$ gesetzt hat, als auch aus Gleichung (3) H zu berechnen und beide Resultate zu vergleichen. Die erste Formel gibt, wenn man $r = 3266608$ Toisen setzt, 3764,96 Toisen, die zweite 3761,35 Toisen; der Fehler beträgt also $^1/_{1000}$ des Ganzen. Noch geringer ist der Fehler der Formel (4). Setzt man nämlich hierin die aus (1) erhaltene Höhe 3764,96, so erhält man $o = 0{,}052385$, was einem Winkel von $3^0\, 5''$ entspricht, so daß der Fehler 5 Secunden oder ungefähr $^1/_{2000}$ des Ganzen beträgt. Ist o gleich oder kleiner als 2^0, was in den meisten Fällen stattfindet, so beträgt der Fehler der Formel (4), wie man sich durch eine ähnliche Rechnung leicht überzeugen kann, weniger als eine Secunde, bezüglich ungefähr $^1/_{7000}$ des Ganzen.*)

Nachdem so die Genauigkeit der Formel (3) u. (4) verificirt worden, können wir uns der im Anfange gestellten Aufgabe zuwenden. Ist H die bekannte Höhe des einen Berges, H^1 die gesuchte des anderen, von dessen Spitze aus man die Spitze des ersten gerade noch soll sehen können, α die Bogenentfernung beider Berge, o die Bogenentfernung, bis auf

*) Will man allgemein die Größe des Fehlers der Formel (4) finden, so gebe man der Gleichung (1), nachdem man in ihr $h = 0$ gesetzt hat, mit Hülfe einer bekannten goniometrischen Beziehung die Form

$$\frac{H}{r} = \frac{\cos ko - \cos (1 - k)\, o}{\cos (1 - k)\, o} = \frac{\cos ko}{\cos (1 - k)\, o} - 1$$

und entwickele nun $\frac{\cos ko}{\cos (1 - k) o}$ in eine Reihe. Dieselbe kann keine ungeraden Potenzen von o enthalten, weil mit dem Wechsel des Zeichens von o der zu entwickelnde Ausdruck sein Zeichen nicht ändert; ihr Anfangsglied ist 1, weil dieser Ausdruck für o = Null gleich 1 wird. Daher hat man bis auf Größen 4ter Ordnung genau

$$\frac{H}{r} = \frac{\cos ko}{\cos (I - k)\, o} - 1 = \alpha o^2 + \beta o^4$$

oder wenn man statt der Kosinusse die gleichgeltenden Reihen setzt,

$$1 - \frac{k^2\, o^2}{2} + \frac{k^4\, o^4}{6} = (1 + \alpha o^2 + \beta o^4) \left(1 - \frac{(1 - k)^2\, o^2}{2} + \frac{(1 - k)^4\, o^4}{6}\right)$$

Die Vergleichung der Coefficienten ergibt

$$\alpha = \frac{1 - 2k}{2}, \quad \beta = \frac{5 - 20k + 24\, k^2 - 8k^3}{24}.$$

Hiernach hat man

$$o^2 = \frac{-\alpha}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{H}{\beta r}},$$

wo man nur das obere Zeichen nehmen darf, weil sonst o^2 negativ würde. Daraus erhält man nach dem binomischen Lehrsatze bis auf die 2te Potenz von $\frac{H}{r}$ genau

$$o^2 = \frac{-\alpha}{2\beta} + \frac{\alpha}{2\beta} \sqrt{1 + \frac{4\beta\, H}{\alpha^2\, r}} = \frac{H}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha^3} \cdot \frac{H^2}{r^2}$$

$$\text{und } o = \sqrt{\frac{H}{\alpha r}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \cdot \frac{H}{r}} = \sqrt{\frac{H}{\alpha r}} \cdot \left[1 - \frac{\beta}{2\alpha^2} \cdot \frac{H}{r}\right]$$

Die Formel (4) gibt also einen Werth für o, der um $\frac{\beta}{2\alpha^2} \cdot \frac{H}{r} \sqrt{\frac{H}{\alpha r}}$ d. h. um ungefähr $\frac{5}{12} \cdot \frac{H}{r} \sqrt{\frac{H}{\alpha r}}$ zu groß ist.

welche man vom ersten Berg aus sehen kann, o^1 die entsprechende Größe für den zweiten Berg, so hat man die Gleichungen:

$$o + o^1 = \alpha$$

$$o = \sqrt{\frac{2H}{r(1-2k)}}$$

$$o^1 = \sqrt{\frac{2H^1}{r(1-2k)}}$$

und daraus endlich

$$\sqrt{H} + \sqrt{H^1} = \alpha \sqrt{\frac{r(1-2k)}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Setzt man hier α gleich dem Bogen, zu dem der Winkel $2^0\ 49'$ gehört, also gleich $\frac{169\ \pi}{60.180}$, und $H = 1904$ Toisen, so kommt

$$\sqrt{H^1} = 57{,}582 - 43{,}635 = 13{,}947$$

und daraus $H^1 = 194{,}52$ Toisen.

Einen Maßstab für die Genauigkeit dieses Resultats erhält man aus folgender Rechnung. Die Gleichung (3) ergibt für $H = 1904$ und $H^1 = 194{,}52$ bezüglich $o = 0{,}0372529$ und $o^1 = 0{,}0119071$, also $o + o^1 = 0{,}0491600$, während $0{,}0491601$ heraus kommen müßte. Setzt man diese Werthe von o und o^1 in die genaue Formel (1) ein, nachdem man in derselben $h = 0$ gemacht hat, so erhält man für H und H^1 die Werthe

$$H = \frac{2r \sin 1^0\ 4'\ 2'' \sin 53'\ 47''}{\cos 1^0\ 58'} = 1904{,}7$$

$$H^1 = \frac{2r \sin 20'\ 28'' \sin 17'\ 12''}{\cos 37'\ 40''} = 194{,}61$$

Martus a. a. O. gibt mit Anwendung unserer Bezeichnungsweise folgende Anleitung zur Auflösung:

Nachdem φ aus $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{(2r + H)H}{r}}$

berechnet ist, hat man

$$H^1 = \frac{r}{\cos\left(\frac{\alpha}{1+k} - \varphi\right)} - r$$

Die Art, wie Martus dies Resultat gefunden hat, ist offenbar eine indirecte; er sucht erst ohne Berücksichtigung der Strahlenbrechung die Winkelentfernung φ, bis auf welche man vom Gipfel des Pics aus sehen kann, zieht dieselbe von der Winkeldistanz der beiden betrachteten Punkte, nachdem er dieselbe wegen der Strahlenbrechung corrigirt hat, ab und erhält dadurch die Winkeldistanz, bis auf welche man von den montañas negras aus sehen kann; aus dem sich ergebenden rechtwinkligen Dreieck berechnet er H^1. Warum er nicht auch die Distanz φ vom Einflusse der Strahlenbrechung befreit hat, ist nicht einzusehen, ebensowenig, warum er α mit $1 + k$ dividirt, statt es mit $1 - k$ zu multipliciren, obwohl practisch beides auf dasselbe hinaus kommt, indem man wegen der Kleinheit von k statt $\frac{1}{1 + k}$ annähernd $1 - k$ setzen kann. Weil überdies der Winkel, von dem der Cosinus genommen werden soll, sehr klein ist, so ist die Formel für H^1 sehr ungenau und gibt nur mit Logarithmentafeln von 7 Stellen das von Martus erhaltene Resultat 213 Toisen. Wollte man wenigstens die beiden letzten Ausstellungen beseitigen; so würde man die Formel von Martus für H^1 vorerst so umgestalten müssen

$$H^1 = \frac{2r \sin^2 {}^1/_2 \, [\alpha \, (1 - k) - \varphi]}{\cos \, [\alpha \, (1 - k) - \varphi]}$$

oder, wenn man wegen der Kleinheit des Winkels $\alpha \, (1 - k) - \varphi$ auf der rechten Seite statt des Nenners die Einheit setzt

$$H^1 = 2r \sin^2 {}^1/_2 \, [\alpha \, (1 - k) - \varphi].$$

Wenn man ferner aus demselben Grunde statt des Sinus den Bogen setzt und die Quadratwurzel zieht, so geht diese Formel über in

$$\sqrt{H^1} = [\alpha \, (1 - k) - \varphi] \sqrt{\frac{r}{2}}$$

Auch die Formel für φ, welches immer sehr klein ist, kann man umgestalten, indem man statt tg φ den Bogen φ setzt und H gegen r vernachlässigt, so daß

$$\varphi = \sqrt{\frac{2H}{r}}$$

wird. Mit diesem Werthe von φ wird die letzte Formel

$$\sqrt{H} + \sqrt{H^1} = \alpha \sqrt{\frac{r \, (1 - k)^2}{2}}$$

eine Gleichung, die von der unsrigen (5) sich merkwürdigerweise nur dadurch unterscheidet, daß $(1 - k)^2$ statt $1 - 2k$ steht, was nur unbedeutend vom Richtigen abweicht, weil k sehr klein ist. In dieser Form gibt sie das Resultat

$$\sqrt{H^1} = 57{,}801 - 43{,}635 = 14{,}166$$

also $H^1 = 200{,}67$ Toisen.

IV.

Zur Pothenot'schen Aufgabe.

Schlömilch hat im neunten Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik pag. 433 eine algebraische Lösung der Pothenot'schen Aufgabe gegeben, indem er von den Gleichungen ausgeht

$$y^2 + z^2 - 2\alpha\, yz = a^2$$
$$z^2 + x^2 - 2\beta\, zx = b^2$$
$$x^2 + y^2 - 2\gamma\, xy = c^2$$

Hier bezeichnen a, b, c die drei Seiten des Dreiecks, x, y, z die von einem Punkte im Innern desselben nach den Ecken gezogenen Graden und α, β, γ die Cosinusse der von diesen gebildeten Winkel. Sind λ, μ, ν die Sinusse der nämlichen Winkel, so bestehen die Relationen

$$(1) \qquad \alpha = \beta\gamma - \mu\nu \quad , \qquad \beta = \gamma\alpha - \nu\lambda \quad , \qquad \gamma = \alpha\beta - \lambda\mu ,$$
$$(2) \quad -\lambda = \beta\nu + \gamma\mu \quad , -\mu = \gamma\lambda + \alpha\nu \quad , -\nu = \alpha\mu + \beta\lambda ,$$

welche sich unmittelbar auf goniometrischem Wege ergeben. Erhebt man jede der Gleichungen (2) auf's Quadrat und benutzt die (1), so erhält man

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\alpha\mu\nu \\ \mu^2 = \nu^2 + \lambda^2 + 2\beta\nu\lambda \\ \nu^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\gamma\lambda\mu \end{cases}$$

Man multiplicire die Gleichungen (1) bezüglich mit 2λ, 2μ, 2ν, und addire die Resultate, multiplicire ferner die Gleichungen (2) bezüglich mit α, β, γ und addire die Resultate; zieht man dann die zweite Summe von der ersten ab, so bekommt man noch die Relation

$$(4) \quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = -2\lambda\mu\nu .$$

Schlömilch führt nun eine neue Unbekannte

$$(5) \quad t = \lambda x + \mu y + \nu z$$

ein und gelangt dadurch, allerdings auf einem etwas complicirten Wege, zur Darstellung von x, y, z in lauter bekannten Größen. Ein kürzerer Weg eröffnet sich durch Einführung der neuen Function

$$(6) \quad 2F = \lambda yz + \mu zx + \nu xy ,$$

wo F den Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks bedeutet. Multiplicirt man nämlich (5) nacheinander mit μx und λy und addirt die Resultate, so kommt

$$\mu tx + \lambda ty = \lambda\mu\,(x^2 + y^2) + (\mu^2 + \lambda^2)\, xy + \lambda\nu yz + \mu\nu xz$$

oder mit Benutzung von (3)

$$\mu tx + \lambda ty = \lambda\mu\,(x^2 + y^2 - 2\gamma xy) + \nu\,(\lambda yz + \mu zx + \nu xy)$$

Durch die dritte der aufzulösenden Gleichungen und Gleichung (6) erhält man hieraus

$$\mu tx + \lambda ty = \lambda\mu c^2 + 2\nu F$$

und in ganz ähnlicher Weise oder auch durch bloße Vertauschung der Buchstaben

$$\lambda tz + \nu tx = \nu\lambda b^2 + 2\mu F$$

$$\nu ty + \mu tz = \mu\nu a^2 + 2\lambda F.$$

Betrachtet man jetzt tx, ty, tz als Unbekannte, so sind in Bezug auf diese vorstehende drei Gleichungen linear, und man erhält durch eine leichte Elimination mit Benutzung der Gleichungen 3,

$$(7)\begin{cases} 2tx = (b^2 + c^2 - a^2)\,\lambda - 4F\alpha \\ 2ty = (c^2 + a^2 - b^2)\,\lambda - 4F\beta \\ 2tz = (a^2 + b^2 - c^2)\,\lambda - 4F\gamma \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste dieser drei letzten Gleichungen mit λ, die zweite mit μ, die dritte mit ν und addirt die Resultate, so hat man mit Benutzung der Gleichungen (5), (3) u. (4)

$$(8) \quad t^2 = 4F\lambda\mu\nu - (\alpha\mu\nu a^2 + \beta\nu\lambda b^2 + \gamma\lambda\mu c^2)$$

Durch die vier letzten Gleichungen gelangt man, wenn man die Größe $\alpha\mu\nu a^2 + \beta\nu\lambda b^2 + \gamma\lambda\mu c^2$ mit E bezeichnet, unmittelbar zu den Formeln:

$$(9)\begin{cases} x = \pm\dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)\,\lambda - 4F\alpha}{2\sqrt{-E + 4F\lambda\mu\nu}} \\ y = \pm\dfrac{(c^2 + a^2 - b^2)\,\mu - 4F\beta}{2\sqrt{-E + 4F\lambda\mu\nu}} \\ z = \pm\dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)\,\nu - 4F\gamma}{2\sqrt{-E + 4F\lambda\mu\nu}} \end{cases}$$

Die von Schlömilch gegebenen Formeln weichen nur dadurch von diesen ab, daß F das doppelte Zeichen hat, wobei jedoch zu bemerken ist, was aus der Lösung Schlömilchs nicht unmittelbar hervorgeht, daß dem positiven Zeichen im Zähler das negative im Nenner entsprechen muß und umgekehrt. Im algebraischen Sinne kann nun allerdings F sowohl positiv als negativ gedacht werden, im Sinne der vorliegenden geometrischen Aufgabe ist es positiv; daher ist die oben gegebene Auflösung die allein berechtigte. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß die Auflösung auch dann noch gilt, wenn der Punkt, von welchem x, y, z ausgeht, nicht im Innern des Dreiecks, sondern außerhalb desselben liegt, wenn man nur die Winkel zwischen diesen Graden in einerlei Richtung von x nach y, von y nach z und von z nach x hin mißt, so daß ihre Summe fortwährend vier Rechten gleich ist.